SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1996-97

Andrea Pascucci

SOLUZIONE FONDAMENTALE E TEORIA DEL POTENZIALE PER EQUAZIONI IPOELLITTICHE DEL SECONDO ORDINE

30 gennaio 1997

Tecnoprint - Bologna 1997

Riassunto. Proviamo l'esistenza e alcune proprietà classiche della soluzione fondamentale di un operatore ipoellittico del second'ordine del tipo seguente

$$L = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(z)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j(z)\partial_{x_j} - \partial_t.$$

Enunciamo poi un teorema di regolarizzazione e una formula di rappresentazione per funzioni L-superparaboliche.

Abstract. We prove the existence and some basic qualitative properties of the fundamental solution of an hypoelliptic second order operator of the following form

$$L = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(z)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j(z)\partial_{x_j} - \partial_t.$$

We also give a theorem about smoothing of L-superparabolic functions. The main result is a representation formula for L-superparabolic functions.

1 Introduzione

In questo seminario esponiamo alcuni recenti risultati ottenuti in collaborazione col Prof. E. Lanconelli ([9], [10]). In $\mathbb{R}^{N+1}$ consideriamo un operatore differenziale del second'ordine del tipo seguente

$$L = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(z)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j(z)\partial_{x_j} - \partial_t \tag{1.1}$$

dove $z = (x,t)$ è un punto di $\mathbb{R}^{N+1}$, $A = (a_{ij})$ è una matrice $N \times N$ simmetrica e semidefinita positiva. Supponiamo che i coefficienti a_{ij}, b_j siano di classe $C^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$, $1 \le i,j \le N$ e che valgano le seguenti ipotesi:

(H_1) *L è ipoellittico*;

(H_2) *$a_{11}(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$*;

(H_3) *L coincide con l'operatore del calore nel complementare di un compatto M di $\mathbb{R}^{N+1}$.*

Come è ben noto, la seguente condizione di Hörmander (H) implica (H_1) (cfr. [7] e [12]):

(H) $\qquad$ rango $\mathcal{L}(X_1,\dots,X_N,Y-\partial_t)(z) = N+1, \qquad \forall z \in \mathbb{R}^{N+1}$,

dove $\mathcal{L}(X_1,\dots,X_N,Y-\partial_t)$ indica l'algebra di Lie generata dai campi

$$X_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\partial_{x_j},\ i = 1,\dots,N \ \text{ e } \ Y - \partial_t = \sum_{j=1}^{N} b_i\partial_{x_j} - \partial_t.$$

In [3] è provato che se i coefficienti di L sono analitici allora (H_1) e (H) sono equivalenti. In generale ciò non è vero, come risulta dal seguente

Esempio 1.1 *In $\mathbb{R}^3$, consideriamo la classe di operatori*

$$L_p = \partial_{x_1}^2 + \exp(-|x_1|^{\frac{p}{2}})\partial_{x_2}^2 - \partial_t$$

con $-1 < p < 0$; ovviamente L_p non verifica (H) per $x_1 = 0$, ma è ipoellittico in base al Teorema 1.1 di [1].

(H_2) è un'ipotesi di non totale degenerazione uniforme.

Per giustificare (H_3), vorremmo sottolineare il fatto che i risultati principali che illustreremo sono di natura locale; dato un operatore L, come in (1.1), che verifichi (H) e (H_2) in $\mathbb{R}^{N+1}$, è possibile modificare L al di fuori di un compatto M_0 di $\mathbb{R}^{N+1}$ in modo

che valgano (H), (H_2) e (H_3). Infatti, se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^{N+1}$, con $M_0 \subset \Omega$, è sufficiente porre

$$L_0 =< (\varphi A + (1-\varphi) I_N)\nabla, \nabla > + \varphi \sum_{j=1}^{N} b_j(z)\partial_{x_j} - \partial_t,$$

dove $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ è una funzione cut-off tale che $\varphi = 1$ su M_0 e $\varphi = 0$ su $\mathbb{R}^{N+1} \setminus \Omega$.

L'oggetto di questo seminario è lo studio della soluzione fondamentale di L e di alcune proprietà delle funzioni L-superparaboliche. Prima di procedere, richiamiamo brevemente le definizioni di fascio parabolico e di funzione superparabolica.

Definizione 1.2 *Il fascio delle funzioni L-paraboliche è definito da*

$$\mathcal{H}^L(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) \mid \ Lu = 0\},$$

per ogni Ω aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$.

Definizione 1.3 *Si dice che un aperto $V \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ è L-regolare (e si scrive $V \in \mathcal{T}_r$) se V è limitato e, per ogni $\varphi \in C(\partial V)$, esiste un'unica la funzione $u =: H_\varphi^V \in \mathcal{H}^L(V) \cap C(\overline{V})$ tale che $u|_{\partial V} = \varphi$.*

Definizione 1.4 *Si dice che la funzione*

$$u \ : \ \Omega \longrightarrow]-\infty, +\infty]$$

è L-superparabolica (e si scrive $u \in S(\Omega)$) se è inferiormente semicontinua, finita in un insieme denso in Ω e se risulta

$$u \geq H_\varphi^V \qquad su\ V,$$

per ogni aperto $V \in \mathcal{T}_r$, $\overline{V} \subseteq \Omega$, e per ogni $\varphi \in C(\partial V)$ tale che $\varphi \leq u$.

Come in [11], Teorema 1[(1)], si prova il seguente risultato che fornisce una caratterizzazione delle funzioni superparaboliche:

Proposizione 1.5 *Se*

$$u \ : \ \Omega \longrightarrow]-\infty, +\infty]$$

è una funzione inferiormente semicontinua, sono equivalenti le seguenti affermazioni:

i) $u \in S(\Omega)$;

ii) $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $Lu \leq 0$ nel senso delle distribuzioni.

[1] In effetti, il Teorema 1 di [11] viene provato sotto l'ipotesi (H), tuttavia tale risultato rimane valido sotto la sola ipotesi di ipoellitticità.

Nei due paragrafi seguenti esponiamo più in dettaglio, ma senza dimostrazioni, i risultati ottenuti. Il secondo paragrafo è dedicato allo studio della soluzione fondamentale Γ di L. Col Teorema 2.1, stabiliamo l'esistenza di Γ e alcune proprietà classiche che seguono immediatamente dal procedimento costruttivo impiegato nella dimostrazione. Forniamo, poi, altre proprietà di Γ: in particolare, mostriamo un teorema di confronto con la soluzione fondamentale dell'operatore del calore.

I risultati principali di questa nota sono contenuti nel terzo paragrafo. Il Teorema 3.1 afferma che ogni funzione superparabolica può essere localmente approssimata mediante una successione monotona crescente di funzioni superparaboliche C^∞. Stabiliamo poi una formula di rappresentazione, conforme a L, per funzioni di classe C^2: un caso particolare è la classica formula di media per le soluzioni dell'equazione del calore (cfr. [13]). Infine, utilizzando i risultati precedenti, estendiamo tale formula alla classe delle funzioni superparaboliche.

2 Studio della soluzione fondamentale

Uno dei principali risultati di questo paragrafo è il seguente

Teorema 2.1 *Esiste una soluzione fondamentale Γ dell'operatore L e gode delle seguenti proprietà:*

i) Γ è una funzione non-negativa e C^∞ nel complementare della diagonale di $\mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^{N+1}$;

ii) per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$, $\Gamma(\cdot; z)$ è una funzione L-parabolica in $\mathbb{R}^{N+1} \setminus \{z\}$ e L-superparabolica in $\mathbb{R}^{N+1}$, in particolare $\Gamma(\cdot; z) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{N+1})$;

iii) per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$, valgono le seguenti identità:

$$L \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Gamma(z;\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta = -\varphi(z), \qquad \forall z \in \mathbb{R}^{N+1}, \tag{2.1}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Gamma(z;\zeta)L\varphi(\zeta)d\zeta = -\varphi(z), \qquad \forall z \in \mathbb{R}^{N+1}; \tag{2.2}$$

iv) $\Gamma(x,t;\xi,\tau) = 0$, se $t \leq \tau$;

v) se Γ^* indica la soluzione fondamentale dell'operatore L^*, aggiunto formale di L, allora

$$\Gamma^*(z;\zeta) = \Gamma(\zeta;z), \qquad \forall z,\zeta \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

In particolare ii), iii) e iv) hanno una ovvia formulazione duale.

La *iii)* del teorema precedente viene migliorata col

Corollario 2.2 *Per ogni misura μ non-negativa, a supporto compatto vale*

$$L \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Gamma(\cdot;\zeta) d\mu(\zeta) = -\mu$$

nel senso delle distribuzioni.

Diamo ora una traccia della dimostrazione del Teorema 2.1.

Dato un cilindro $U = \Omega \times]a,b[\subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ con $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e $a < b$, poniamo

$$\partial_r U = (\Omega \times \{a\}) \cup (\partial\Omega \times [a,b]). \tag{2.3}$$

Diciamo che $\partial_r U$ è la frontiera parabolica di U. Enunciamo un principio di massimo che utilizziamo più volte nel corso della prova.

Teorema 2.3 *(Principio di massimo su regioni cilindriche)*
Sia $u \in C^2(Q)$, dove $Q = \Omega \times]a,b[$ è un cilindro di $\mathbb{R}^{N+1}$, e $Lu \geq 0$ su Q. Se $\limsup_{\partial_r Q} u \leq 0$ allora $u \leq 0$ su Q.

Il primo passo nella prova del Teorema 2.1 consiste nel costruire un ricoprimento di $\mathbb{R}^{N+1}$ formato da cilindri aperti e regolari, nel senso che, per ogni cilindro U del ricoprimento e per ogni $f \in C(U \cup \partial_r U)$, il problema di Dirichlet

$$\text{(PD)} \qquad \begin{cases} Lu = -f, & \text{(nel senso delle distribuzioni)} \\ u|_{\partial_r U} = 0. \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $u \in C(U \cup \partial_r U)$.

I cilindri del ricoprimento sono del tipo

$$U_{n,R} = O_n \times]-R, R[, \qquad R > 0,\ n \in \mathbb{N},$$

dove $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente di aperti che ricoprono $\mathbb{R}^N$ e che abbiamo costruito traendo da un'idea di Bony in [2].

Definiamo poi l'operatore di Green di L relativo al cilindro regolare U:

$$\mathcal{G}_U \ : \ C(U \cup \partial_r U) \longrightarrow C(U \cup \partial_r U)$$

$\mathcal{G}_U$ è l'operatore lineare positivo che ad ogni $f \in C(U \cup \partial_r U)$ associa $u = \mathcal{G}_U f$, la soluzione del problema (PD).

$\mathcal{G}_U$ può essere rappresentato in forma integrale mediante una funzione G_U, non-negativa e C^∞ sul complementare della diagonale di $U \times U$: per ogni $f \in C(U \cup \partial_r U)$, vale

$$\mathcal{G}_U f(z) = \int_U G_U(z;\zeta) f(\zeta) d\zeta, \qquad z \in U \cup \partial_r U.$$

G_U è detta funzione di Green di L relativa ad U e gode della seguenti proprietà:

i) $G_U(\cdot;\zeta)|_{\partial_r U} = 0$, per ogni $\zeta \in U$;
ii) $G_U(x,t;\xi,\tau) = 0$, se $t \leq \tau$;
iii) se G_U^* indica la funzione di Green dell'operatore L^*, aggiunto formale di L, allora

$$G_U^*(z;\zeta) = G_U(\zeta;z), \qquad \forall z,\zeta \in U.$$

Fissiamo $R > 0$; avendo dimostrato che $n \longrightarrow G_{U_{n,R}}$ è crescente, definiamo la funzione di Green G_R di L relativa alla striscia $U_R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{n,R}$, come l'estremo superiore di $\{G_{U_{n,R}}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Infine, per ogni $z,\zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$, definiamo la soluzione fondamentale di L nel modo seguente:

$$\Gamma(z;\zeta) = G_R(z;\zeta)$$

dove R è un numero positivo tale che $z,\zeta \in U_R$. In effetti, tale definizione è ben posta e permette di ricavare senza difficoltà le proprietà *i) - vi)* dell'enunciato.

Diamo ora un teorema di confronto fra Γ e la soluzione fondamentale K dell'operatore del calore $H = \Delta - \partial_t$.

Teorema 2.4 *Per ogni* $\zeta = (\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{N+1}$ *e per ogni* $\varepsilon > 0$, *esistono* $R,T \in \mathbb{R}^+$ *tali che*

$$\Gamma(\cdot;\zeta) \leq TK(\cdot;\xi,\tau-\varepsilon)$$

su $\mathbb{R}^{N+1} \setminus (B(\xi,R)\times]\tau,\tau+R[)$.

Ricordiamo che, per l'ipotesi (H.3), L coincide con H nel complementare di un compatto di $\mathbb{R}^{N+1}$: il Teorema 2.4 esprime quindi un risultato non inaspettato. Tuttavia la prova non è immediata, pur essendo basata su alcuni adattamenti di risultati classici.

Introduciamo alcune notazioni:

(N.1) $\pi_1 = \{x \in \mathbb{R}^N \mid\ x = (x_1,\dots,x_N),\ x_1 > 0\}$;

(N.2) $\widetilde{x} = (x_2,\dots,x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$, per ogni $x = (x_1,\dots,x_N) \in \mathbb{R}^N$;

(N.3) per ogni R,c costanti positive,

$$S_{R,c} =: Q_R\times]0,c[,$$

dove

$$Q_R = \{x \in \mathbb{R}^N \mid\ |x| > R\}.$$

Il primo passo nella prova del Teorema 2.4 consiste nel seguente risultato di unicità per il problema di Dirichlet relativo ad H su una semistriscia di $\mathbb{R}^{N+1}$:

Teorema 2.5 *Sia* $u \in C^2(S_{R,c})\cap C(S_{R,c}\cup\partial_r S_{R,c})$ *una soluzione del problema di Dirichlet*

(PD1)
$$\begin{cases} Hu = 0, & \text{in } S_{R,c} \\ u|_{\partial_r S_{R,c}} = 0; \end{cases}$$

se esiste $\gamma > 0$ *tale che*

$$\int_0^c \int_{Q_R} \exp(-\gamma|x|^2)|u(x,t)|dxdt < \infty \tag{2.4}$$

allora $u = 0$ *in* $S_{R,c}$.

Si dimostra poi l'unicità della soluzione di (PD1) nella classe delle funzioni non-negative:

Teorema 2.6 *Sia* $u \in C^2(S_{R,c}) \cap C(S_{R,c} \cup \partial_r S_{R,c})$ *una soluzione non-negativa del problema di Dirichlet (PD1), allora* $u \equiv 0$.

La dimostrazione di questo teorema discende dai seguenti due lemmi.

Lemma 2.7 *Sia* u *una funzione non-negativa tale che* $Hu = 0$ *in* $\pi_1 \times]0, c[$, *dove* c *è una costante positiva. Per ogni* δ *positivo,* $\delta < c$, *vale*

$$0 \leq \int_{\pi_1} [K(x-y,t) - K(x_1+y_1, \widetilde{x}-\widetilde{y}, t)]u(y+\delta e_1, \delta)dy \leq u(x+\delta e_1, t+\delta) \tag{2.5}$$

per ogni $(x,t) \in \pi_1 \times]0, c-\delta[$.

Lemma 2.8 *Nelle stesse ipotesi del Lemma precedente, per* $0 < \delta < \frac{c}{2}$, *esiste* $\gamma > 0$ *tale che*

$$\int_0^\delta \int_{x_1 \geq \frac{c}{2}} \exp(-\gamma|x|^2)u(x,t)dxdt < \infty.$$

Dal Teorema 2.6 e dal principio di massimo deduciamo poi il Teorema 2.4.

Come conseguenza del Teorema 2.4, otteniamo anche un teorema di unicità della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} Lu = 0, & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, \infty[\\ u(\cdot, 0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.6}$$

Teorema 2.9 *Sia* $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[) \cap C(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$ *una soluzione del problema di Cauchy (2.6). Se vale una delle seguenti condizioni:*

i) u *è non-negativa;*

ii) per ogni $T > 0$ *esiste* $\gamma > 0$ *tale che*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \exp(-\gamma|x|^2)|u(x,t)|dxdt < \infty;$$

allora u *è identicamente nulla.*

Concludiamo il paragrafo enunciando alcune ulteriori proprietà classiche della soluzione fondamentale. Precisamente vale

Teorema 2.10 *Per ogni* $\zeta = (\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{N+1}$,

$$\limsup_{z \to \zeta} \Gamma(z; \zeta) = \infty. \tag{2.7}$$

Inoltre, se $t > \tau$, *si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x, t; \zeta) dx = 1. \tag{2.8}$$

La dimostrazione di questo teorema richiede in maniera essenziale la stima di Γ all'infinito fornita nel Teorema 2.4.

Una conseguenza del risultato precedente è una formula di rappresentazione della soluzione del problema di Cauchy relativo ad L:

Corollario 2.11 *Per ogni* $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^N)$, *poniamo*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x, t; \xi, 0)\varphi(\xi) d\xi, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[;$$

allora u *è soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} Lu = 0, & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, \infty[\\ \lim\limits_{t \to 0^+} u(x,t) = \varphi(x) & \forall x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

3 Proprietà delle funzioni L-superparaboliche

In questo paragrafo affrontiamo alcune questioni di teoria del potenziale. Il primo risultato riguarda il problema della regolarizzazione delle funzioni superparaboliche.

Teorema 3.1 *Sia* u *una funzione* L*-superparabolica su un aperto* Ω *di* $\mathbb{R}^{N+1}$. *Per ogni aperto limitato* $V \subseteq \overline{V} \subseteq \Omega$ *esiste una successione monotona crescente* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *di funzioni* L*-superparaboliche* $C^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$, *tali che*

$$\lim_{n \to \infty} u_n(z) = u(z), \qquad \forall z \in V.$$

Il Teorema 3.1 afferma che ogni funzione superparabolica può essere localmente approssimata mediante una successione monotona crescente di funzioni superparaboliche regolari. Se i coefficienti di L sono costanti, il risultato è banale in quanto è sufficiente mollificare la funzione in modo classico. Tuttavia, nel caso di coefficienti variabili, questo

procedimento è inutilizzabile poichè, in generale, L non commuta con gli usuali operatori di mollificazione di Friedrichs. Il problema di costruire un operatore di regolarizzazione ad hoc per un'equazione differenziale è stato affrontato da alcuni autori con strategie diverse.

In un lavoro del 1963, [8], Littman, considerando operatori uniformemente ellittici, ottenne un risultato analogo al Teorema 3.1: in quel caso il termine u_n della successione regolarizzante era dato esplicitamente dall'applicazione su u di un operatore integrale il cui nucleo era ricavato dalla soluzione fondamentale.

Più recentemente, in [6] Teorema 4.3, è stato trattato il caso dell'equazione del calore sul gruppo di Heisenberg: in questo caso viene utilizzato un operatore di mollificazione modellato sulla struttura di gruppo di $\mathbb{H}^N \times \mathbb{R}$.

In [5], per operatori parabolici in forma di divergenza e con parte principale uniformemente ellittica, vengono invece utilizzati mollificatori ottenuti mediante la superposizione di operatori di media sugli insiemi di livello della soluzione fondamentale di L. Un attento esame di quest'ultimo approccio ha però evidenziato la necessità di precise stime asintotiche della soluzione fondamentale e delle sue derivate di qualunque ordine vicino al polo: questo fatto rende, almeno per ora, inapplicabile il metodo di [5] nel caso, più generale, di (1.1).

La prova del Teorema 3.1 si basa su due ingredienti essenziali:

i) la proprietà della soluzione fondamentale Γ di L di avere il supporto contenuto in un semispazio di $\mathbb{R}^{N+1}$, più precisamente (cfr. *iv)* del Teorema 2.1)

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = 0 \qquad \text{se } t \leq \tau;$$

ii) la seguente osservazione: se $u \in S(\Omega)$, per la Proposizione 1.5, $Lu \leq 0$ nel senso delle distribuzioni, dunque $-Lu$ è una misura non-negativa in Ω. Per ogni misura non-negativa μ a supporto compatto $\mathbb{R}^{N+1}$, definiamo

$$\Gamma_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Gamma(z;\zeta)d\mu(\zeta), \qquad z \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Chiamiamo Γ_μ l'L-potenziale di μ. Ora, fissato un aperto limitato $V \subseteq \overline{V} \subseteq \Omega$, poniamo

$$\mu = -(Lu)|_{\overline{V}} \qquad \text{e} \qquad u_V = \Gamma_\mu. \tag{3.1}$$

Allora, per la *iii)* del Teorema 2.1 e per l'ipoellitticità di L, otteniamo

$$(u - u_V)|_V \in C^\infty(V) \qquad \text{e} \qquad L(u - u_V) = 0 \quad \text{in } V.$$

Inoltre

$$Lu_V = Lu \leq 0 \quad \text{in } \overline{V}, \qquad Lu_V = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^{N+1} \setminus \overline{V}$$

e, ovviamente, u_V è una funzione non-negativa.

Abbiamo dunque provato la seguente affermazione:
se $u \in S(\Omega)$, per ogni aperto limitato $V \subseteq \overline{V} \subseteq \Omega$ esiste una funzione non-negativa $u_V \in S(\mathbb{R}^{N+1}) \cap \mathcal{H}^L(\mathbb{R}^{N+1} \setminus \overline{V})$ tale che

$$(u - u_V)|_V \in \mathcal{H}^L(V). \tag{3.2}$$

Passiamo ora alla

Dimostrazione del Teorema 3.1. In base all'osservazione precedente, è sufficiente provare l'esistenza di una successione approssimante per la funzione u_V definita in (3.1).

Consideriamo una funzione cut-off $\psi \in C_0^\infty([0,+\infty[,[0,1])$, tale che $\psi(t) = 1$ per $t \geq 1$, $\psi(t) = 0$ per $t \leq \frac{1}{2}$ e $\frac{d}{dt}\psi(t) \geq 0$ per ogni $t > 0$. Sia $\psi_n(t) = \psi(nt)$, $n \in \mathbb{N}$. Per ogni $(x,t),(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{N+1}$, poniamo

$$\Gamma_n(x,t;\xi,\tau) = \Gamma(x,t;\xi,\tau)\psi_n(t-\tau), \qquad n \in \mathbb{N},$$

e

$$u_n(z) = \int \Gamma_n(z;\zeta)d\mu(\zeta), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Osserviamo che, per il Teorema 2.1,

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = 0 \qquad \text{per } t \leq \tau.$$

Dunque, è chiaro che $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente di funzioni C^∞ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma_n(z;\zeta) = \Gamma(z;\zeta), \qquad \forall z,\zeta \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Per il teorema della convergenza monotona, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente di funzioni C^∞ che converge puntualmente a u_V in $\mathbb{R}^{N+1}$ per $n \longrightarrow \infty$. Inoltre, per la Proposizione 1.5, $u_n \in S(\mathbb{R}^{N+1})$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, poichè

$$Lu_n(z) = -\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Gamma(z;\zeta)\psi_n'(t-s)d\mu(\zeta) \leq 0, \qquad n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{R}^N. \tag{3.3}$$

□

Se confrontata con gli analoghi risultati citati in precedenza, sicuramente la prova del Teorema 3.1 appare più semplice. D'altra parte, il tipo di approssimazione qui utilizzato ha la caratteristica sfavorevole di modificare drasticamente il supporto armonico di u_V, come si può capire esaminando la (3.3).

Diamo ora una formula di rappresentazione, conforme a L, per funzioni regolari.

Definizione 3.2 *Per ogni $r > 0$ e $z \in \mathbb{R}^{N+1}$, poniamo*

$$\Omega_r(z) = \left\{\zeta \in \mathbb{R}^{N+1} \mid \Gamma(z;\zeta) > \frac{1}{r}\right\}.$$

Chiamiamo $\Omega_r(z)$ la L-palla parabolica di centro z e raggio r.

Con la seguente proposizione stabiliamo alcune proprietà delle L-palle paraboliche.

Lemma 3.3 *Per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$, le L-palle paraboliche centrate in z godono delle seguenti proprietà:*
i) per ogni $r > 0$, $\Omega_r(z)$ è un insieme limitato e non vuoto;
ii) $\Omega_r(z)$ si stringe a $\{z\}$ per $r \to 0^+$ nel senso che

$$\bigcap_{r>0} \overline{\Omega_r(z)} = \{z\};$$

iii) se $|\Omega_r(z)|$ indica la misura di Lebesgue di $\Omega_r(z)$, allora si ha

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{|\Omega_r(z)|}{r} = 0;$$

iv) per quasi ogni $r > 0$, $\partial\Omega_r(z)$ è una C^∞-varietà N-dimensionale.

Allora vale

Teorema 3.4 *Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^{N+1})$. Per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ e $r > 0$, si ha*

$$u(z) = u_r(z) - \Phi_r u(z) \equiv \tag{3.4}$$

$$\equiv \int_{\Omega_r(z)} u(\zeta) E_r(z;\zeta) d\zeta - \frac{1}{r} \int_0^r \int_{\Omega_l(z)} \left(\Gamma(z;\zeta) - \frac{1}{l}\right) Lu(\zeta) d\zeta dl,$$

dove

$$E_r(z;\zeta) = \frac{1}{r} < A(\zeta)\nabla_\xi \Gamma(z;\zeta), \frac{\nabla_\xi \Gamma(z;\zeta)}{\Gamma(z;\zeta)^2} > + \frac{1}{r} \mathrm{div} Y(\zeta) \ \lg(r\Gamma(z;\zeta)).$$

Formule di rappresentazione sugli insiemi di livello della soluzione fondamentale sono state stabilite da diversi autori: a questo riguardo, rimandiamo a [4] per un'ampia rassegna di tali risultati. Qui, osserviamo solo che, come caso particolare della (3.4), si ha la classica formula di media, per le soluzioni dell'equazione del calore, provata in [13].

La prova del Teorema 3.4 discende sostanzialmente dal Teorema 2.10 ed è una conseguenza standard della formula di Green.

Nella seconda parte di [10] è provato il risultato principale. Si dimostra che, utilizzando il Teorema 3.1 di regolarizzazione delle funzioni superparaboliche, è possibile estendere la (3.4) alla classe delle funzioni superparaboliche.

Teorema 3.5 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e $u \in S(\Omega)$. Sia $\mu = -Lu$. Per ogni $z \in \Omega$ e $r > 0$ tali che $\overline{\Omega_r(z)} \subseteq \Omega$, vale*

$$u(z) = u_r(z) - \Phi_r u(z) \equiv \tag{3.5}$$

$$\equiv \int_{\Omega_r(z)} u(\zeta) E_r(z;\zeta) d\zeta + \frac{1}{r} \int_0^r \int_{\Omega_l(z)} \left(\Gamma(z,\zeta) - \frac{1}{l}\right) d\mu(\zeta) dl.$$

Dal Teorema 3.5 ricaviamo, infine, un risultato sulla approssimazione monotona di funzioni superparaboliche mediante gli operatori di media introdotti in precedenza.

Corollario 3.6 *Sia* $u \in S(\mathbb{R}^{N+1})$. *Per ogni* $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$, *si ha*
i) $u_\rho(z_0) \leq u_r(z_0)$, *se* $r \leq \rho$;
ii) $\lim_{r \to 0^+} u_r(z_0) = u(z_0)$.

Riferimenti bibliografici

[1] D.R. Bell, S-E.A. Mohammed, *An extension of Hörmander's theorem for infinitely degenerate second-order operators*, Duke Math. J., **78,3** (1995), 453–475.

[2] J.M. Bony, *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble , **19,1** (1969), 277–304.

[3] M. Derridj, C. Zuilly, *Régularité analytique d'opérateurs dégénérés*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A - B , **273** (1971), A720–A723.

[4] E.B. Fabes, N. Garofalo, *Mean value properties of solutions to parabolic equations with variable coefficients*, J. Math. Anal. Appl., **121** (1987), 305–316.

[5] N. Garofalo, E. Lanconelli, *Asymptotic behaviour of fundamental solutions and potential theory of parabolic operators with variable coefficients*, Math. Ann., **283** (1989), 211–239.

[6] N. Garofalo, F. Segala, *Estimates for the fundamental solution and Wiener's criterion for the heat equation on the Heisemberg group*, Indiana U. Math. J., **39,4** (1990), 1155–1196.

[7] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math., **119** (1967), 147–171.

[8] W. Littman, *Generalized subharmonic functions: monotonic approximations and an improved maximum principle*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., III Ser., **17** (1963), 207–222.

[9] E. Lanconelli, A. Pascucci, *On the fundamental solution for hypoelliptic second order partial differential operators with non-negative characteristic form*, preprint

[10] E. Lanconelli, A. Pascucci, *Superparabolic functions related to second order hypoelliptic operators*, preprint

[11] P. NEGRINI, V. SCORNAZZANI, *Superharmonic functions and regularity of boundary points for a class of elliptic-parabolic partial differential operators*, Bollettino UMI An. Funz. Appl. Serie VI, Vol. III-C 1 (1984), 85–106.

[12] O.A. OLEJNIK, E.V. RADKEVIČ, *Second order equations with non-negative characteristic form*, Providence, Amer. Math. Soc. (1973).

[13] N.A. WATSON, *A theory of temperatures in several variables*, Proc. Lond. Math. Soc., **26,3** (1973), 385–417.